

Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей¹

А.Н.Горбань

Вычислительный центр СО РАН в г.Красноярске²

Исследуются вычислительные возможности искусственных нейронных сетей. В связи с этим происходит возврат к классическому вопросу о представлении функций многих переменных с помощью суперпозиций и сумм функций одного переменного и новая редакция этого вопроса (ограничение одной произвольно выбранной нелинейной функцией одного переменного).

Показано, что можно получить сколь угодно точное приближение любой непрерывной функции многих переменных, используя операции сложения и умножения на число, суперпозицию функций, линейные функции а также одну произвольную непрерывную нелинейную функцию одной переменной.

Для многочленов получен алгебраический вариант теоремы: любой многочлен может от многих переменных быть за конечное число шагов (точно) получен с использованием операций сложения умножения на число и произвольного (одного) многочлена от одного переменного степени выше 1.

Аппроксимационная теорема Стоуна переносится с колец функций на любые их алгебры, замкнутые относительно произвольной нелинейной операции, а также относительно сложения и умножения на число.

Для нейронных сетей полученные результаты означают: от функции активации нейрона требуется только нелинейность - и более ничего. Какой бы она ни была, можно так построить сеть связей и подобрать коэффициенты линейных связей между нейронами, чтобы нейронная сеть сколь угодно точно вычисляла любую непрерывную функцию от своих входов.

Введение

В словах «искусственные нейронные сети» слышатся отзвуки фантазий об андроидах и бунте роботов, о машинах, заменяющих и имитирующих человека. Эти фантазии интенсивно поддерживаются многими разработчиками нейросистем: рисуется не очень отдаленное будущее, в котором роботы осваивают различные виды работ, просто наблюдая за человеком, а в более отдаленной перспективе – человеческое сознание и личность перегружаются в искусственную нейронную сеть – появляются шансы на вечную жизнь.

¹ Сибирский журнал вычислительной математики, 1998. Т.1, № 1. С. 12-24.

² 660036, Красноярск-36, ИВМ СО РАН. E-mail: gorban@icm.krasn.ru

Если перейти к прозаическому уровню повседневной работы, то нейронные сети - это всего-навсего сети, состоящие из связанных между собой простых элементов - формальных нейронов. Значительное большинство работ по нейроинформатике посвящено переносу различных алгоритмов решения задач на такие сети.

Ядром используемых представлений является идея о том, что нейроны можно моделировать довольно простыми автоматами, а вся сложность мозга, гибкость его функционирования и другие важнейшие качества определяются связями между нейронами. Каждая связь представляется как совсем простой элемент, служащий для передачи сигнала. Предельным выражением этой точки зрения может служить лозунг: "структура связей – все, свойства элементов – ничто".

Совокупность идей и научно-техническое направление, определяемое описанным представлением о мозге, называется коннекционизмом (по-английски connection – связь). Как все это соотносится с реальным мозгом? Так же, как карикатура или шарж со своим прототипом-человеком - весьма условно. Это нормально: важно не буквальное соответствие живому прототипу, а продуктивность технической идеи.

С коннекционизмом тесно связан следующий блок идей:

1) однородность системы (элементы одинаковы и чрезвычайно просты, все определяется структурой связей);

2) надежные системы из ненадежных элементов и "аналоговый ренессанс" – использование простых аналоговых элементов;

3) "голографические" системы – при разрушении случайно выбранной части система сохраняет свои полезные свойства.

Предполагается, что система связей достаточно богата по своим возможностям и достаточно избыточна, чтобы скомпенсировать бедность выбора элементов, их ненадежность, возможные разрушения части связей.

Коннекционизм и связанные с ним идеи однородности, избыточности и голографичности еще ничего не говорят нам о том, как же такую систему

научить решать реальные задачи. Хотелось бы, чтобы это обучение обходилось не слишком дорого.

Существует большой класс задач: нейронные системы ассоциативной памяти, статистической обработки, фильтрации и др., для которых связи формируются по явным формулам. Но еще больше (по объему существующих приложений) задач требует неявного процесса. По аналогии с обучением животных или человека этот процесс называют обучением.

Обучение обычно строится так: существует задачник – набор примеров с заданными ответами. Эти примеры предъявляются системе. Нейроны получают по входным связям сигналы – "условия примера", преобразуют их, несколько раз обмениваются преобразованными сигналами и, наконец, выдают ответ – также набор сигналов. Отклонение от правильного ответа штрафуются. Обучение состоит в минимизации штрафа как (неявной) функции связей. Технике такой оптимизации и возникающим при этом задачам посвящена обширная литература (см. [1-3]).

Неявное обучение приводит к тому, что структура связей становится "непонятной" – не существует иного способа ее прочесть, кроме как запустить функционирование сети. Становится сложно ответить на вопрос: "Как нейронная сеть получает результат?" – то есть построить понятную человеку логическую конструкцию, воспроизводящую действия сети. В последнее время все большее внимание привлекает вопрос: как сделать работу нейронной сети понятной - доступной явному описанию [3-6].

Среди задач, возникающих при изучении искусственных нейронных сетей, особое место занимает вопрос о пределах возможности этих систем: какие задачи они могут решать? Вопросы такого рода встают всегда при появлении новых моделей вычисления, универсальных по своему замыслу. Существует несколько вариантов утверждений о том, что нейронная сеть может вычислять любую функцию с произвольной наперед заданной точностью [7-10]. В данной работе вопрос о аппроксимационных возможностях нейронных сетей решается в более общем контексте и доказана теорема, единообразно охватывающая

широкий спектр задач аппроксимации - от равномерного приближения функций многочленами до их аппроксимации искусственными нейронными сетями.

1. Элементы нейронных сетей

Для описания алгоритмов и устройств в нейроинформатике выработана специальная "схемотехника", в которой элементарные устройства – сумматоры, синапсы, нейроны и т.п. объединяются в сети, предназначенные для решения задач.

Интересен статус этой схемотехники – ни в аппаратной реализации нейронных сетей, ни в профессиональном программном обеспечении все эти элементы вовсе не обязательно реализуются как отдельные части или блоки. Используемая в нейроинформатике идеальная схемотехника представляет собой особый язык для представления нейронных сетей. При программной и аппаратной реализации описания, выполненные на этом языке, переводятся на языки другого уровня, более пригодные для реализации.

Важнейший элемент нейросистем – это *адаптивный сумматор*. Он вычисляет скалярное произведение вектора входного сигнала x на вектор параметров α . На схемах будем обозначать его так, как показано на рис. 1. Адаптивным называем его из-за наличия вектора настраиваемых параметров α .

Для многих задач полезно иметь линейную неоднородную функцию выходных сигналов. Ее вычисление также можно представить с помощью адаптивного сумматора, имеющего $n+1$ вход и получающего на 0-й вход постоянный единичный сигнал (рис. 2).

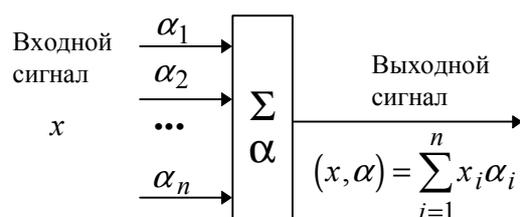


Рис. 1. Адаптивный сумматор.

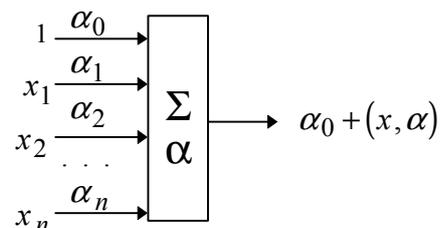


Рис. 2. Неоднородный адаптивный сумматор

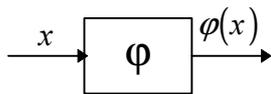


Рис. 3. Нелинейный преобразователь сигнала.

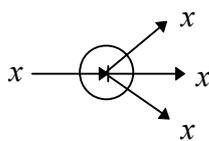


Рис. 4. Точка ветвления

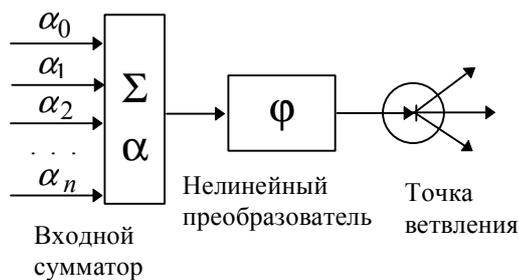


Рис. 5. Формальный нейрон

Нелинейный преобразователь сигнала изображен на рис. 3. Он получает скалярный входной сигнал x и переводит его в $\varphi(x)$.

Точка ветвления служит для рассылки одного сигнала по нескольким адресам (рис. 4). Она получает скалярный входной сигнал x и передает его всем своим выходам.

Стандартный формальный нейрон составлен из входного сумматора, нелинейного преобразователя и точки ветвления на выходе (рис. 5).

Линейная связь - синапс - отдельно от сумматоров не встречается, однако для некоторых рассуждений бывает удобно выделить этот элемент (рис. 6). Он умножает входной сигнал x на «вес синапса» α .

$$x \xrightarrow{\alpha} \alpha x$$

Также бывает полезно «присоединить» связи не ко входному сумматору, а к точке ветвления. В результате получаем элемент, двойственный адаптивному сумматору и называемый «*выходная звезда*». Его выходные связи производят умножение сигнала на свои веса.

Итак, дано описание основных элементов, из которых составляются нейронные сети.

2. Архитектура нейронных сетей

Как можно составлять сети из элементов? Строго говоря, как угодно, лишь бы входы получали какие-нибудь сигналы. Но такой произвол слишком необозрим, поэтому используют несколько стандартных архитектур, из которых

путем вырезания лишнего или (реже) добавления строят большинство используемых сетей.

Сначала следует решить вопрос о том, как будет согласована работа различных нейронов во времени - вопрос о синхронности функционирования. Здесь и далее рассматриваются только нейронные сети, синхронно функционирующие в дискретные моменты времени.

Выделяется две базовых архитектуры нейронных сетей – *слоистые и полносвязные сети*.

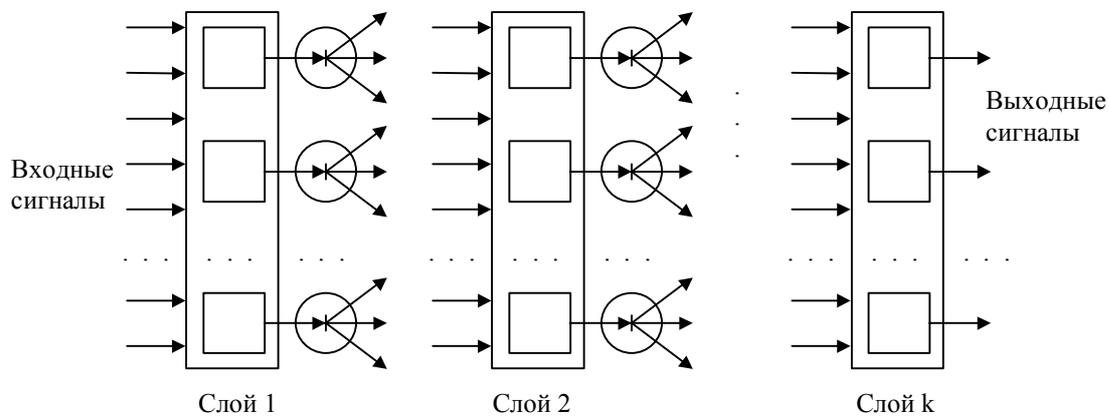


Рис. 7. Слоистая сеть

Слоистые сети: нейроны расположены в несколько слоев (рис. 7). Нейроны первого слоя получают входные сигналы, преобразуют их и через точки ветвления передают нейронам второго слоя. Далее срабатывает второй слой и т.д. до k -го слоя, который выдает выходные сигналы для интерпретатора и пользователя. Если не оговорено противное, то каждый выходной сигнал i -го слоя подается на вход всех нейронов $i+1$ -го. Число нейронов в каждом слое может быть любым и никак заранее не связано с количеством нейронов в других слоях. Стандартный способ подачи входных сигналов: все нейроны первого слоя получают каждый входной сигнал. Особое распространение получили трехслойные сети, в которых каждый слой имеет свое наименование: первый – входной, второй – скрытый, третий – выходной.

Полносвязные сети: каждый нейрон передает свой выходной сигнал остальным нейронам, включая самого себя. Выходными сигналами сети могут

быть все или некоторые выходные сигналы нейронов после нескольких тактов функционирования сети. Все входные сигналы подаются всем нейронам.

Элементы слоистых и полносвязных сетей могут выбираться по-разному. Существует, стандартный выбор – нейрон с адаптивным неоднородным линейным сумматором на входе (рис. 5).

Для полносвязной сети входной сумматор нейрона фактически распадается на два: первый вычисляет линейную функцию от входных сигналов сети, второй – линейную функцию от выходных сигналов других нейронов, полученных на предыдущем шаге.

Функция активации нейронов (характеристическая функция) ϕ – нелинейный преобразователь, преобразующий выходной сигнал сумматора (см. рис. 5) – может быть одной и той же для всех нейронов сети. В этом случае сеть называют *однородной (гомогенной)*. Если же ϕ зависит еще от одного или нескольких параметров, значения которых меняются от нейрона к нейрону, то сеть называют *неоднородной (гетерогенной)*.

Составление сети из нейронов стандартного вида (рис. 5) не является обязательным. Слоистая или полносвязная архитектуры не налагают существенных ограничений на участвующие в них элементы. Единственное жесткое требование, предъявляемое архитектурой к элементам сети, это соответствие размерности вектора входных сигналов элемента (она определяется архитектурой) числу его входов.

Если полносвязная сеть функционирует до получения ответа заданное число тактов k , то ее можно представить как частный случай k -слоистой сети, все слои которой одинаковы и каждый из них соответствует такту функционирования полносвязной сети.

Существенное различие между полносвязной и слоистой сетями возникает тогда, когда число тактов функционирования заранее не ограничено – слоистая сеть так работать не может.

3. Существуют ли функции многих переменных?

Вопрос, вынесенный в заголовок раздела, естественно возникает при изучении возможностей нейронных сетей. Из схем предыдущих разделов видно, что нейронные сети вычисляют линейные функции, нелинейные функции *одного переменного*, а также всевозможные суперпозиции - функции от функций, получаемые при каскадном соединении сетей. Что можно получить, используя только такие операции? Какие функции удастся вычислить точно, а какие функции можно сколь угодно точно аппроксимировать с помощью нейронных сетей? Чтобы изучить возможности нейронных сетей, нужно ответить на эти вопросы.

Заданный вопрос имеет очень большую историю и заведомо старше, чем исследования искусственных нейронных сетей.

Какие функции вообще доступны вычислению? Если мы умеем складывать и умножать числа, то мы можем точно вычислять многочлены и рациональные функции (отношения многочленов) с рациональными коэффициентами от рациональных же аргументов. Можно, однако, задавать функции с помощью уравнений. Если считать решения нескольких простых уравнений известными, то класс вычисляемых функций расширится - решения некоторых более общих уравнений удастся выразить через эти, более простые функции.

Классический пример: если использовать радикалы - решения уравнений $x^n=a$, то можно явно получить решения произвольных уравнений 2-й, 3-й и 4-й степеней. Уже уравнения 5-й степени неразрешимы в радикалах. Однако остается вопрос: можно ли к корням добавить еще некоторые «стандартные» функции небольшого числа переменных и выразить через них решения уравнений более высоких степеней? Вопрос был настолько важен, что Гильберт в списке своих проблем под номером 13 поместил следующую задачу:

Представляется ли корень уравнения

$$x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$$

(как функция коэффициентов) суперпозицией каких-либо непрерывных функций двух переменных?

Для уравнений 5-й и 6-й степени такое представление возможно не только с помощью непрерывных, но даже аналитических функций.

Оказалось полезным абстрагироваться от уравнений и поставить общий вопрос: можно ли произвольную непрерывную функцию n переменных получить с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций двух переменных? Ответ оказался положительным! В серии работ [11-13] А.Н.Колмогоров, затем В.И.Арнольд и вновь А.Н.Колмогоров решили эту проблему: можно получить любую непрерывную функцию n переменных с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций *одного* переменного.

Последняя теорема А.Н.Колмогорова [13] из этой серии настолько проста и изящна, что мы чуть позже приведем ее целиком. А пока - несколько замечаний о условиях теоремы.

От условия непрерывности можно отказаться - тогда получится довольно тривиальный результат связанный, по существу, с равномощностью отрезка и куба любой размерности. Условие непрерывности нельзя значительно усилить: существуют аналитические функции многих переменных, которые не допускают представления с помощью суперпозиции аналитических функций двух переменных. Более того, все l раз непрерывно дифференцируемые функции трех переменных нельзя представить в виде суперпозиций функций двух переменных, каждая из которых дифференцируема $[2l/3]$ раз и все частные производные которых порядка $[2l/3]$ удовлетворяют условию Липшица (выражение $[2l/3]$ означает целую часть числа $2l/3$). Это доказано А.Г.Витушкиным [14].

А теперь - **теорема Колмогорова**, завершившая серию исследований для непрерывных функций:

Каждая непрерывная функция n переменных, заданная на единичном кубе n -мерного пространства, представима в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} h_q \left[\sum_{p=1}^n \varphi_q^p(x_p) \right], \quad (1)$$

где функции $h_q(u)$ непрерывны, а функции $\varphi_q^p(x_p)$, кроме того, еще и стандартны, т.е. не зависят от выбора функции f .

В частности, каждая непрерывная функция двух переменных x, y представима в виде

$$f(x, y) = \sum_{q=1}^5 h_q [\varphi_q(x) + \psi_q(y)]. \quad (2)$$

Так существуют ли функции многих переменных? В каком-то смысле - да, в каком-то - нет. Все непрерывные функции многих переменных могут быть получены из непрерывных функций одного переменного с помощью линейных операций и суперпозиции. Требования гладкости и аналитичности существенно усложняют вопрос. На этом фоне совершенно неожиданно выглядит тот факт, что *любой многочлен от многих переменных может быть получен из одного произвольного нелинейного многочлена от одного переменного с помощью линейных операций и суперпозиции*. Доказательство этой теоремы будет дано в конце статьи.

4. Универсальные аппроксимационные способности произвольной нелинейности и обобщение теоремы Стоуна

В этом разделе для множеств непрерывных функций, замкнутых относительно любой нелинейной операции (а не только для колец), доказана обобщенная аппроксимационная теорема. Она интерпретируется как утверждение о универсальных аппроксимационных возможностях произвольной нелинейности: с помощью линейных операций и каскадного соединения можно из произвольного нелинейного элемента получить устройство, вычисляющее любую непрерывную функцию с любой наперед заданной точностью.

До сих пор речь шла о *точном представлении* функций многих переменных с помощью функций одного переменного. Оказалось, что в классе непрерывных

функций такое представление возможно. Но кроме вопроса о точном представлении существует еще один - об *аппроксимации*. Можно даже предположить, что он важнее - вычисление большинства функций производится приближенно даже при наличии «точных» формул.

Приближение функций многочленами и рациональными функциями имеет историю, еще более давнюю, чем проблема точного представления. Знаменитая **теорема Вейерштрасса** утверждает, что непрерывную функцию нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на замкнутом ограниченном множестве Q можно равномерно приблизить последовательностью полиномов..

Чтобы сформулировать обобщения и усиления теоремы Вейерштрасса, рассмотрим компактное пространство X и алгебру $C(X)$ непрерывных функций на X с вещественными значениями.

Сильным обобщением теоремы о возможности равномерного приближения непрерывных функций многочленами является теорема Стоуна [15,16]:

Пусть $E \subseteq C(X)$ - замкнутая подалгебра в $C(X)$, $1 \in E$ и функции из E разделяют точки в X (то есть для любых различных $x, y \in X$ существует такая функция $g \in E$, что $g(x) \neq g(y)$). Тогда $E = C(X)$.

Теорема Стоуна обобщает теорему Вейерштрасса по двум направлениям. Во-первых, рассматриваются функции на произвольном компакте, а не только функции многих действительных переменных. Во-вторых, доказано утверждение, новое даже для функций одного переменного (не говоря уже о многих): плотно не только множество многочленов от координатных функций, но вообще кольцо многочленов от любого набора функций, разделяющих точки. Следовательно, плотно множество тригонометрических многочленов, множество линейных комбинаций функций вида $\exp[-(x-x_0, Q(x-x_0))]$, где (x, Qx) - положительно определенная квадратичная форма и др.

Дан рецепт конструирования таких обобщений: достаточно взять произвольный набор функций, разделяющих точки, построить кольцо многочленов от них - и получим плотное в $C(X)$ множество функций.

Кроме аппроксимации функций многочленами и их обобщениями из колец функций, разделяющих точки, в последнее время все большее внимание уделяется приближению функций многих переменных с помощью линейных операций и суперпозиций функций одного переменного. Такое приближение осуществляется специальными формальными "устройствами" – нейронными сетями. Каждая сеть состоит из формальных нейронов. Нейрон получает на входе вектор сигналов x , вычисляет его скалярное произведение на вектор весов α и некоторую функцию одного переменного $\varphi(x, \alpha)$. Результат рассылается на входы других нейронов или передается на выход. Таким образом, нейронные сети вычисляют суперпозиции простых функций одного переменного и их линейных комбинаций.

Известен ряд теорем [8-10] об аппроксимации непрерывных функций многих переменных нейронными сетями с использованием практически произвольной непрерывной функции одного переменного. В данном разделе мы покажем, что эта функция действительно может быть произвольной и докажем обобщенную аппроксимационную теорему, естественным образом охватывающую и классическую теорему Стоуна, и аппроксимацию функций многих переменных суперпозициями и линейными комбинациями функций одного переменного.

Чтобы получить требуемое обобщение, перейдем от рассмотрения колец функций к изучению их алгебр, замкнутых относительно некоторой нелинейной унарной операции.

Пусть $E \subseteq C(X)$ - линейное пространство, $C(\mathbf{R})$ - пространство непрерывных функций на действительной оси \mathbf{R} , $f \in C(\mathbf{R})$ - нелинейная функция и для любого $g \in E$ выполнено $f(g) \in E$. В этом случае будем говорить, что E замкнуто относительно нелинейной унарной операции f .

Очевидный пример: множество функций n переменных, которые можно точно представить, используя заданную функцию одного переменного и линейные функции, является линейным пространством, замкнутым относительно нелинейной унарной операции f .

Замечание. Линейное пространство $E \subseteq C(X)$ замкнуто относительно нелинейной операции $f(x) = x^2$ тогда и только тогда, когда E является кольцом.

Действительно, $fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$ поэтому для линейного пространства $E \subseteq C(X)$ замкнутость относительно унарной операции $f(x) = x^2$ равносильна замкнутости относительно произведения функций.

Согласно приведенному замечанию, теорема Стоуна может быть переформулирована так.

Пусть $E \subseteq C(X)$ - замкнутое линейное подпространство в $C(X)$, $1 \in E$, функции из E разделяют точки в X и E замкнуто относительно нелинейной унарной операции $f(x) = x^2$. Тогда $E = C(X)$.

Наше обобщение теоремы Стоуна состоит в замене $f(x) = x^2$ на произвольную нелинейную непрерывную функцию.

Теорема 1. Пусть $E \subseteq C(X)$ - замкнутое линейное подпространство в $C(X)$, $1 \in E$, функции из E разделяют точки в X и E замкнуто относительно нелинейной унарной операции $f \in C(\mathbf{R})$. Тогда $E = C(X)$.

Доказательство. Рассмотрим множество всех непрерывных унарных операций указанного вида, относительно которых инвариантно E : Обозначим это P_E множество таких всех таких непрерывных функций $p \in C(\mathbf{R})$, что $p(E) \subseteq E$, то есть для любого $g \in E$ выполнено: $p(g) \in E$. Множество P_E обладает следующими свойствами:

- 1) P_E - полугруппа относительно суперпозиции функций;
- 2) P_E - замкнутое линейное подпространство в $C(\mathbf{R})$ (в топологии равномерной сходимости на компактах);
- 3) $1 \in P_E$ и $\text{id} \in P_E$ ($\text{id}(x) \equiv x$).
- 4) P_E включает хотя одну непрерывную нелинейную функцию.

Дальнейшее следует из теоремы 2, которая является, по существу, подготовительной теоремой о полугруппах функций.

Теорема 2. Пусть множество $P \subseteq C(\mathbf{R})$ удовлетворяет условиям 1-4. Тогда $P = C(\mathbf{R})$.

Доказательство опирается на три леммы.

Лемма 1. В условиях теоремы 2 существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $g \in P$, не являющаяся линейной.

Доказательство. Пусть $v(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $v(x)=0$ при $|x| > 1$, $\int_{\mathbf{R}} v(x) dx = 1$. Рассмотрим оператор осреднения

$$J_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x+y) \frac{1}{\varepsilon} v\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выполнено: $J_\varepsilon f(x) \in P$.

Действительно, $f(x+y) \in E$ для каждого фиксированного y (так как константы принадлежат E и E замкнуто относительно линейных операций и суперпозиции функций). Интеграл $J_\varepsilon f(x)$ принадлежит E , так как E является замкнутым линейным подпространством в $C(\mathbf{R})$, а этот интеграл – пределом конечных сумм.

Функция $J_\varepsilon f(x)$ принадлежит $C^\infty(\mathbf{R})$, так как

$$J_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x+y) \frac{1}{\varepsilon} v\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy = \int_{\mathbf{R}} f(z) \frac{1}{\varepsilon} v\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz$$

(напомним, что v – функция с компактным носителем).

Существует такое $\varepsilon > 0$, что функция $g = J_\varepsilon f$ не является линейной, поскольку $J_\varepsilon f \rightarrow f$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, пространство линейных функций замкнуто, а f не является линейной функцией. Таким образом, в предположениях леммы существует нелинейная функция $g \in P \cap C^\infty(\mathbf{R})$, которую можно выбрать в виде $g = J_\varepsilon f$

Лемма 2. Пусть в условиях теоремы 2 существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $g \in P$, не являющаяся линейной. Тогда функция $q(x) = x^2$ принадлежит P .

Доказательство. Существует точка x_0 , для которой $g''(x_0) \neq 0$. Обозначим $r(x) = 2(g(x+x_0) - g(x_0) - xg'(x_0)) / g''(x_0)$. Очевидно, что $r \in P$, $r(0) = 0$, $r'(0) = 0$, $r''(0) = 2$, $r(x) = x^2 + o(x^2)$. Поэтому

$$r(\varepsilon x) / \varepsilon^2 \rightarrow x^2 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поскольку P замкнуто, получаем: функция $q(x)=x^2$ принадлежит P .

Лемма 3. Пусть в условиях теоремы 2 функция $q(x)=x^2$ принадлежит P . Тогда P является кольцом – для любых $f, g \in P$ их произведение $fg \in P$.

Доказательство. Действительно, $fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$ и, так как P замкнуто относительно суперпозиции и линейных операций, то $fg \in P$.

Доказательство теоремы 2 заканчивается обращением к классической теореме Вейерштрасса о приближении функций многочленами: из лемм 1-3 следует, что в условиях теоремы 2 P является кольцом и, в частности, содержит все многочлены (которые получаются из 1 и id с помощью умножения и линейных операций). По теореме Вейерштрасса отсюда следует, что $P=C(\mathbf{R})$.

Теоремы 1,2 можно трактовать как утверждения о универсальных аппроксимационных свойствах любой нелинейности: с помощью линейных операций и каскадного соединения можно из произвольных нелинейных элементов получить любой требуемый результат с любой наперед заданной точностью.

5. Точное представление многочленов от многих переменных с помощью одного произвольного многочлена от одного переменного, линейных операций и суперпозиции

В этом разделе исследуются полугруппы полиномов от одного переменного относительно суперпозиции. Показано, что если такая полугруппа содержит все многочлены первой степени и хотя бы один – более высокой, то она включает все многочлены. На основании этого факта доказано, что всегда возможно представить многочлен от многих переменных суперпозициями произвольного нелинейного многочлена от одного переменного и линейных функций.

Вернемся к классическому вопросу о представлении функций многих переменных с помощью функций меньшего числа переменных. Следует еще раз заметить, что классический вопрос существует не один, а два:

1. Можно ли получить *точное* представление функции многих переменных с помощью суперпозиции функций меньшего числа переменных?

2. Можно ли получить *сколь угодно точную аппроксимацию* функции многих переменных с помощью некоторых более простых функций и операций?

В рамках первого вопроса особый интерес представляют конструкции, в которых для точного представления всех функций многих переменных используется один и тот же набор функций одного переменного.

Традиционно считается, что эти функции должны иметь весьма специальный и довольно экзотический вид, например, как в обсуждавшейся выше теореме Колмогорова, где использовались существенно негладкие функции.

Напротив, свобода в выборе функций одного переменного для решения второго вопроса при том же самоограничении (один набор функций одного переменного - для приближенного представления всех функций многих переменных) очень велика. Для этого, как показано в предыдущем разделе, можно использовать практически любую нелинейную функцию и достаточно всего одной.

Далее доказываются теоремы, относящиеся к первому вопросу (точное представление). В частности, показано, что можно точно представить любой многочлен от многих переменных с помощью суперпозиций произвольного нелинейного многочлена от одного переменного и линейных функций. Следовательно особенной пропасти между 1-м и 2-м вопросом не существует. Именно это обстоятельство побудило нас включить в книгу данный раздел.

Пусть $\mathbf{R}[X]$ - кольцо многочленов от одного переменного над полем \mathbf{R} , $E \subset \mathbf{R}[X]$ - линейное пространство многочленов над \mathbf{R} .

Предложение 1. Если E замкнуто относительно суперпозиции многочленов, содержит все многочлены первой степени и хотя бы один многочлен $p(x)$ степени $m > 1$, то $E = \mathbf{R}[X]$.

Доказательство. Заметим, что степень многочлена $p'(x) = p(x+1) - p(x)$ равна $m-1$, и $p'(x) \in E$, так как E содержит многочлены первой степени (поэтому $x+1 \in E$),

замкнуто относительно суперпозиции (поэтому $p(x+1) \in E$) и линейных операций (поэтому $p'(x) \in E$).

Если $m > 2$, то понижаем степень с помощью конечных разностей (переходим к p' , p'' и т.д.), пока не получим многочлен второй степени. Вычитая из него линейную часть и умножая на константу, получаем: $x^2 \in E$. Поэтому для любого $f \in E$ имеем $f^2 \in E$ (т.к. E - полугруппа). Дальнейшее очевидно: как неоднократно отмечалось выше, отсюда следует, что для любых $f, g \in E$ их произведение $fg \in E$ а с помощью умножения и сложения многочленов первой степени порождается все кольцо $\mathbf{R}[X]$.

Перейдем к задаче представления многочленов от многих переменных. Обозначим $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ кольцо многочленов от n переменных над полем \mathbf{R} .

Для каждого многочлена от одного переменного введем множество тех многочленов, которые можно выразить с его помощью, используя суперпозиции и линейные функции. Пусть p – многочлен от одного переменного, $E_p[X_1, \dots, X_n]$ – множество многочленов от n переменных, которое можно получить из p и многочленов первой степени, принадлежащих $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, с помощью операций суперпозиции, сложения и умножения на число.

Следующие два предложения дают удобную для дальнейшего характеризацию $E_p[X_1, \dots, X_n]$ и следуют непосредственно из определений.

Предложение 2. Множество $E_p[X_1, \dots, X_n]$ является линейным пространством над \mathbf{R} и для любого многочлена $g(x_1, \dots, x_n)$ из $E_p[X_1, \dots, X_n]$ $p(g(x_1, \dots, x_n)) \in E_p[X_1, \dots, X_n]$.

Предложение 3. Для данного p семейство линейных подпространств $L \subseteq \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, содержащих все многочлены первой степени и удовлетворяющих условию

$$\text{если } g(x_1, \dots, x_n) \in L, \text{ то } p(g(x_1, \dots, x_n)) \in L,$$

замкнуто относительно пересечений. Минимальным по включению элементом этого семейства является $E_p[X_1, \dots, X_n]$.

Для любого линейного подпространства $E \subseteq \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ рассмотрим множество алгебраических унарных операций, которые переводят элементы E в элементы E :

$$P_E = \{p \in \mathbf{R}[X] \mid p(g(x_1, \dots, x_n)) \in E \text{ для любого } g(x_1, \dots, x_n) \in E\}.$$

Предложение 4. Для любого линейного подпространства $E \subseteq \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ множество полиномов P_E является линейным пространством над \mathbf{R} , замкнуто относительно суперпозиции и содержит все однородные многочлены первой степени.

Если линейное пространство E содержит 1, а P_E включает хотя бы один многочлен, степени $m > 1$ (т.е. нелинейный), то $P_E = \mathbf{R}[X]$.

Доказательство. Замкнутость P_E относительно суперпозиции следует из определения, все однородные полиномы первой степени входят в P_E , поскольку E является линейным пространством, отсюда также следует, что P_E является линейным пространством. Наконец, если $1 \in E$ и P_E содержит многочлен степени $m > 1$, то $1 \in P_E$, тогда $P_E = \mathbf{R}[X]$ по предложению 1.

Теорема 3. Пусть $E \subseteq \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ – линейное подпространство, P_E содержит хотя бы один многочлен степени $m > 1$ и $1 \in E$, тогда E является кольцом (с единицей).

Доказательство. По предложению 4 в условиях теоремы $P_E = \mathbf{R}[X]$. В частности, $x^2 \in P_E$. Это означает, что для любого $f \in E$ также и $f^2 \in E$. Поэтому для любых $f, g \in E$ получаем: $fg \in E$.

Теорема 4. Для любого многочлена p степени $m > 1$

$$E_p[X_1, \dots, X_n] = \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$$

Доказательство. Заметим, что $E = E_p[X_1, \dots, X_n]$ – линейное подпространство в $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, P_E содержит хотя бы один многочлен (p) степени $m > 1$ и E содержит все многочлены первой степени (и поэтому также 1). В силу теоремы 3, E является кольцом, а так как оно содержит все многочлены первой степени, то совпадает с $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, поскольку, используя умножение и сложение можно из этих многочленов получить любой.

Таким образом, из p и многочленов первой степени с помощью операций суперпозиции, сложения и умножения на число можно получить все элементы $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.

6. Нейронные сети – универсальные аппроксимирующие устройства и могут с любой точностью имитировать любой непрерывный автомат

Класс функций, вычисляемый с помощью нейронных сетей, замкнут относительно линейных операций. Действительно, пусть есть нейронные сети S_1, S_2, \dots, S_k , которые вычисляют функции F_1, F_2, \dots, F_k от вектора входных сигналов x . Линейная комбинация $\alpha_0 + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_k F_k$ вычисляется сумматором (рис. 2) с весами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, на вход которого подаются выходные сигналы сетей S_1, S_2, \dots, S_k . Разница в числе тактов функционирования этих сетей до получения ответа легко компенсируется «линиями задержки», составленными из связей (рис. 6) с единичным весом.

Кроме того, класс функций, вычисляемый с помощью нейронных сетей, замкнут относительно унарной операции, осуществляемой нелинейным преобразователем сигнала, входящим в состав нейрона (см. рис. 3, 5): если сеть S вычисляет функцию F , то, подавая выход этой сети на вход нелинейного преобразователя (рис. 3), получим на его выходе функцию $\varphi(F)$.

Тем самым, по теореме 1 множество функций, вычисляемых нейронными сетями с заданной непрерывной нелинейной характеристической функцией, плотно в пространстве непрерывных функций от входных сигналов.

Теперь - об имитации гладких автоматов с помощью нейронных сетей. Если есть возможность с любой точностью приблизить любую непрерывную функцию и нет ограничений на способы соединения устройств, то можно сколь угодно точно имитировать работу любого непрерывного автомата.

Каждый автомат имеет несколько входов (n), несколько выходов (p) и конечный набор (s) параметров состояния. Он вычисляет $s+p$ функций от $n+s$ переменных. Аргументы этих функций - входные сигналы (их n) и текущие

параметры состояния (их s). Значения функций – выходные сигналы (их p) и параметры состояния на следующем шаге (их s). Каждый такой автомат можно представить как систему из $s+p$ более простых автоматов. Эти простые автоматы вычисляют по одной функции от $n+s$ переменных. Смена состояний достигается за счет того, что часть значений этих функций на следующем шаге становится аргументами – так соединены автоматы.

Таким образом, без потери общности можно рассматривать сеть автоматов как набор устройств, каждое из которых вычисляет функцию нескольких переменных $f(x_1, \dots, x_n)$. Этот хорошо известный факт позволяет использовать предыдущие результаты. Нейронные сети позволяют с любой точностью вычислять произвольную непрерывную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Следовательно, с их помощью можно сколь угодно точно аппроксимировать функционирование любого непрерывного автомата.

Автор благодарен С.Е.Гилеву, Г.Ш.Фридману и Э.Э.Шнолю за полезное обсуждение.

Работа поддержана Красноярским краевым фондом науки, грант 6F0124.

Литература

1. Zurada J. M. Introduction to artificial neural systems. PWS Publishing Company, 1992. 785 pp.
2. Haykin S. Neural networks. A comprehensive foundations. McMillan College Publ. Co. N.Y., 1994. 696 pp.
3. Горбань А.Н., Россиев Д.А. Нейронные сети на персональном компьютере. Новосибирск: Наука (Сиб. отделение), 1996. 276 с.
4. Le Cun Y., Denker J.S., Solla S.A. Optimal Brain Damage // Advances in Neural Information Processing Systems II (Denver 1989). San Mateo, Morgan Kaufman, 1990. P. 598-605/
5. Горбань А.Н. Обучение нейронных сетей. М.": изд. СССР-США СП "ParaGraph", 1990. 160 с. (English Translation: Training Neural Networks // AMSE Transaction, Scientific Siberian, A, 1993, Vol. 6. Neurocomputing. P. 1-134).
6. Prechelt L. Comparing Adaptive and Non-Adaptive Connection Pruning With Pure Early Stopping // Progress in Neural Information Processing (Hong Kong, September 24-27, 1996), Springer, 1996. Vol. 1. P. 46-52.
7. Cybenko G. Approximation by superposition of a sigmoidal function. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 1989. Vol. 2. PP. 303 - 314.
8. Hornik K., Stinchcombe M., White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. Neural Networks. 1989. Vol. 2. PP. 359 - 366.
9. Kochenov D.A., Rossiev D.A. Approximations of functions of $C[A,B]$ class by neural-net predictors (architectures and results). AMSE Transaction, Scientific Siberian, A. 1993, Vol. 6. Neurocomputing. PP. 189-203. Tassin, France.
10. Gilev S.E., Gorban A.N. On completeness of the class of functions computable by neural networks. Proc. of the World Congress on Neural Networks (WCNN'96). Sept. 15-18, 1996, San Diego, CA, Lawrens Erlbaum Associates, 1996. PP. 984-991.
11. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных. Докл. АН СССР, 1956. Т. 108, №. 2 С.179-182.
12. Арнольд В.И. О функциях трех переменных. Докл. АН СССР, 1957. Т. 114, № 4. С. 679-681.
13. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного. Докл. АН СССР, 1957. Т. 114, № 5. С. 953-956.
14. Витушкин А.Г. О многомерных вариациях. М.: Физматгиз, 1955.
15. Stone M.N. The generalized Weierstrass approximation theorem. Math. Mag., 1948. V.21. PP. 167-183, 237-254.
16. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 360 с.